

# Indhold

Forord . . . . .	i
Nogle få ord om strukturen af bogen . . . . .	iii
<b>Prolog</b>	<b>ix</b>
<b>1 <math>\sigma</math>-algebra og mål</b>	<b>1</b>
1.1 Målelige mængder – begrebet $\sigma$ -algebra . . . . .	1
1.2 Borel-algebraen i $\mathbb{R}^d$ . . . . .	7
1.3 Mål og deres grundlæggende egenskaber . . . . .	13
Opgaver . . . . .	18
<b>2 Dynkings Lemma og Entydighed af mål</b>	<b>25</b>
2.1 $\delta$ -systemer og Dynkings Lemma . . . . .	25
2.2 Entydighedsresultater for mål . . . . .	28
2.3 Regularitet af Borel-mål . . . . .	32
Opgaver . . . . .	36
<b>3 Konstruktion af mål</b>	<b>39</b>
3.1 Problemstillingen . . . . .	39
3.2 Det ydre mål . . . . .	40
3.3 Carathéodorys Lemma . . . . .	43
3.4 Hvornår løser det ydre mål problemstillingen? . . . . .	47
3.5 Lebesgue-Stieltjes mål på $\mathbb{R}$ . . . . .	51
Opgaver . . . . .	58
<b>4 Målelige funktioner og afbildninger</b>	<b>59</b>
4.1 Målelige afbildninger . . . . .	59
4.2 Målelige funktioner med værdier i $\mathbb{R}$ . . . . .	65
4.3 Målelighed ved grænseovergang . . . . .	67
4.4 Målelighed i delrum . . . . .	73
4.5 Simple funktioner . . . . .	78
Opgaver . . . . .	82
<b>5 Lebesgue-integralet</b>	<b>89</b>
5.1 Integralet af positive simple funktioner . . . . .	92

## Indhold

5.2	Integration af positive målelige funktioner . . . . .	95
5.3	Nulmængder og $\mu$ -næsten overalt . . . . .	104
5.4	Integration af reelle funktioner . . . . .	107
5.5	Konvergenssætninger for integralet . . . . .	115
5.6	Integration over delmængde . . . . .	120
5.7	Lebesgue-integralet vs. Riemann-integralet . . . . .	123
	Opgaver . . . . .	128
<b>6</b>	<b>Produktmål</b>	<b>137</b>
6.1	Produktrummet af to målelige rum . . . . .	137
6.2	Produktrum af flere end to målelige rum . . . . .	141
6.3	Eksistens og entydighed af produktmål . . . . .	145
6.4	Integration med hensyn til produktmål – Tonellis og Fubinis Sætninger . . . . .	154
	Opgaver . . . . .	162
<b>7</b>	<b>Integral-uligheder og <math>\mathcal{L}^p</math>-rum</b>	<b>167</b>
7.1	Konvekse funktioner og Jensens ulighed . . . . .	167
7.2	Young, Hölder, Markov og Borel-Cantelli . . . . .	174
7.3	$\mathcal{L}^p$ -rummene og semi-normerne $\ \cdot\ _p$ . . . . .	177
7.4	Konvergens i $\mu$ - $p$ -middel . . . . .	186
7.5	Rummene $L^p(\mu)$ . . . . .	192
7.6	Approksimation med kontinuerte funktioner . . . . .	194
	Opgaver . . . . .	198
<b>8</b>	<b>Målelighed og integration af komplekse funktioner</b>	<b>203</b>
8.1	Målelighed af komplekse funktioner . . . . .	203
8.2	Integration af komplekse funktioner . . . . .	205
8.3	$\mathcal{L}^p$ -rum af komplekse funktioner . . . . .	212
	Opgaver . . . . .	215
<b>9</b>	<b>Hilbert-rum</b>	<b>217</b>
9.1	Indre produkter . . . . .	217
9.2	Ortogonalitet . . . . .	226
9.3	Projektionssætningen . . . . .	229
9.4	Ortonormalsystemer og ortonormalbaser . . . . .	233
9.5	Lineære funktionaler på et Hilbertrum . . . . .	243
	Opgaver . . . . .	246
<b>10</b>	<b>Tætheder og absolut kontinuitet</b>	<b>257</b>
10.1	Mål med tæthed . . . . .	257
10.2	Entydighed af tæthed . . . . .	261
10.3	Absolut kontinuitet og singularitet . . . . .	265
10.4	Lebesgue-dekompositionen og Radon-Nikodyms Sætning . . . . .	267
	Opgaver . . . . .	272
<b>11</b>	<b>Transformation</b>	<b>277</b>

11.1	Transformation af mål . . . . .	277
11.2	Translationsinvariante mål i $\mathbb{R}^d$ . . . . .	281
11.3	Affine, bijektive transformationer af Lebesgue-målet . . . . .	284
11.4	Transformation af Lebesgue målet med injektive $C^1$ -afbildninger . . . . .	292
11.5	Bevis for Transformationssætningen . . . . .	297
	Opgaver . . . . .	307
<b>12</b>	<b>Fourier-transformationen</b>	<b>313</b>
12.1	Definition og grundlæggende egenskaber . . . . .	313
12.2	Foldning . . . . .	318
12.3	Riemann-Lebesgues Lemma . . . . .	323
12.4	Inversionssætningen . . . . .	324
12.5	Fourier-transformationen på $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\lambda)$ . . . . .	329
	Opgaver . . . . .	333
<b>13</b>	<b>Grundlæggende begreber i sandsynlighedsteori</b>	<b>337</b>
13.1	Sandsynlighedsfelter, stokastiske variable og fordelinger . . . . .	338
13.2	Diskrete stokastiske variable og vektorer . . . . .	342
13.3	Absolut kontinuerte stokastiske variable og vektorer . . . . .	350
13.4	Momenter, kovarians og korrelation . . . . .	355
13.5	Uafhængige stokastiske variable . . . . .	359
13.6	Store tals lov og frekvensfortolkningen af sandsynligheder . . . . .	367
13.7	Kolmogorovs 0-1-lov, og det andet Borel-Cantelli Lemma . . . . .	370
	Opgaver . . . . .	374
	<b>Appendikser</b>	<b>381</b>
A.1	Elementær mængdelære . . . . .	381
A.2	Tællelige mængder . . . . .	386
A.3	Udvalgsaksiomet og Zorns Lemma . . . . .	394
A.4	Den udvidede reelle tallinie $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	396
A.5	Infimum, supremum, limes inferior og limes superior . . . . .	398
A.6	Generelle partitions $\sigma$ -algebraer og kardinalitet af $\sigma$ -algebraer . . . . .	406
A.7	Borel-målelighed i generelle metriske rum . . . . .	410
A.8	Vitalis Sætning . . . . .	414
	<b>Litteratur</b>	<b>417</b>
	<b>Indeks</b>	<b>419</b>